S2 B4 Correction examen ALM

Exercice 1 : opérations matricielles

Les questions sont indépendantes.

1. *Considérons les deux matrices à coefficients réels :* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. *Pour chacun des produits suivants, dire (en justifiant) s'il est bien défini ou non. En cas de réponse positive, effectuer le produit.*

   (a) AB

   A a 3 colonnes et B a 2 lignes. Le nombre de colonnes de A n'étant pas égal au nombre de lignes de B, AB n'est pas défini.

   (b) BA

   B a 2 colonnes et A a 2 lignes. Le nombre de colonnes de B étant égal au nombre de lignes de A, BA est bien défini et aura 2 lignes et 3 colonnes. On a
   $$BA = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

2. *On considère les matrices suivantes :*
   $$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

   (a) *Calculer AB.*

   On a $AB = I_2$.

   (b) *La matrice A est-elle inversible ? Justifier et, si votre réponse est positive, donner A^{-1}.*

   La matrice A n'étant pas une matrice carrée, elle n'est pas inversible.

3. (a) *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -3 & -7 & -14 \end{pmatrix}$. *On admet que A est inversible. Trouver A^{-1}. Vous ferez apparaitre tous les détails de vos calculs.*

   Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On sait que $AU = V \iff U = A^{-1}V$.

   $$AU = V \iff \begin{cases} x + 2y + 3z &= X \\ x + 3y + 7z &= Y \\ -3x - 7y - 14z &= Z \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z &= X \\ y + 4z &= Y - X \\ -y - 5z &= Z + 3X \end{cases}$$ en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

   Puis, en faisant $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, et en remontant le système, on obtient

   $$AU = V \iff \begin{cases} x + 2y + 3z &= X \\ y + 4z &= Y - X \\ -z &= 2X + Y + Z \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -7X - 7Y - 5Z \\ y &= 7X + 5Y + 4Z \\ z &= -2X - Y - Z \end{cases} \iff U = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -5 \\ 7 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times V$$

   Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -5 \\ 7 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) *Expliquer comment vous pouvez vérifier le résultat obtenu à la question précédente.*

   On vérifie que $AA^{-1} = I_3$.

Exercice 2 : application linéaire

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a-b)X^2 + (a+b-c)X - 2a + 2b \end{array} \right.$

1. *Trouver proprement la dimension du noyau de* f*, en précisant une de ses bases.*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ f((a,b,c)) = 0X^2 + 0X + 0\big\} \\ &= \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a-b=0, a+b-c=0, -2a+2b=0\big\} \\ &= \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a=b \text{ et } c=2a\big\} \\ &= \{(a,a,2a),\ a \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1,1,2),\ a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u=(1,1,2)) \end{aligned}$$

Ainsi, (u) est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Or $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, d'où (u) est libre. (u) est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ qui est de dimension 1.

2. *Énoncer rigoureusement le théorème du rang. En déduire la dimension de l'image de* f*.*

• Théorème du rang : soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors,

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Kerf}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

• Cela donne ici, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$.

3. *Trouver une base de* $\mathrm{Im}(f)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \big\{(a-b)X^2 + (a+b-c)X - 2a + 2b,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\big\} \\ &= \big\{a(X^2+X-2) + b(-X^2+X+2) + c(-X),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\big\} \\ &= \mathrm{Vect}(P_1 = X^2+X-2, P_2 = -X^2+X+2, P_3 = -X) = \mathrm{Vect}(P_1,P_2) \text{ car } P_1 + P_2 = -2P_3 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{F} = (P_1, P_2)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Or $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2$. (P_1, P_2) est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3 : changement de bases

Les questions sont indépendantes.

1. *On considère l'application linéaire* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-3y, -2x+y) \end{array} \right.$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$*. On admet que* $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1 = (2,1), \varepsilon_2 = (1,1))$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$*.*

(a) *Écrire la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{B}$ *au départ et à l'arrivée.*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) *Écrire la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{B}'$ *au départ et* $\mathcal{B}$ *à l'arrivée. Faire apparaitre l'essentiel de vos calculs essentiels.*

$f(\varepsilon_1) = (1,-3)$ et $f(\varepsilon_2) = (-1,-1)$. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) *Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée. Faire apparaitre l'essentiel de vos calculs.*

$f(e_1) = (2,-2) = 4\varepsilon_1 - 6\varepsilon_2$ et $f(e_2) = -4\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2$ (par résolution de systèmes). Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

2. *Soient $\mathcal{B} = (u_1 = (1,2), u_2 = (-1,-1))$ une base de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = (P_1 = 2, P_2 = X-1, P_3 = (X+1)^2)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$.*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit $u = (0,1) \in \mathbb{R}^2$. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) = aX^2 + bX + c$.

On a $u = u_1 + u_2$, ainsi $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u)) = AU = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $f(u) = 3P_1 - 5P_2 - 2P_3 = 3\times 2 - 5(X-1) - 2(X+1)^2 = -2X^2 - 9X + 9$. Donc, $a = -2, b = -9$ et $c = 9$.

Exercice 4 : un exemple

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$. Soient les sous-espaces vectoriels de E : $F = Vect(\varepsilon_1)$ et $G = Vect(\varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 = (2,1)$ et $\varepsilon_2 = (-1,2)$.

1. *Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.*

Soit $u \in F \cap G$. On a $u \in F$ et $u \in G$. Ainsi, $\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \alpha\varepsilon_1 = (2\alpha, \alpha)$ et $u = \beta\varepsilon_2 = (-\beta, 2\beta)$. On en déduit que $2\alpha = -\beta$ et $\alpha = 2\beta$. Ainsi, $\alpha = \beta = 0$ D'où $u = 0_E$, ce qui montre que $F \cap G \subset \{0_E\}$. Or on sait que $\{0_E\} \subset F \cap G$ car $F \cap G$ est un sev de E.

On a donc $F \cap G = \{0_E\}$.

2. *Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $v = \left(\dfrac{2y+4x}{5}, \dfrac{y+2x}{5}\right) \in F$ et $w = \left(\dfrac{-2y+x}{5}, \dfrac{4y-2x}{5}\right) \in G$.*

- $v = \dfrac{y+2x}{5}(2,1) = \dfrac{y+2x}{5}\varepsilon_1 \implies v \in F$.
- $w = \dfrac{2y-x}{5}(-1,2) = \dfrac{2y-x}{5}\varepsilon_2 \implies w \in G$.

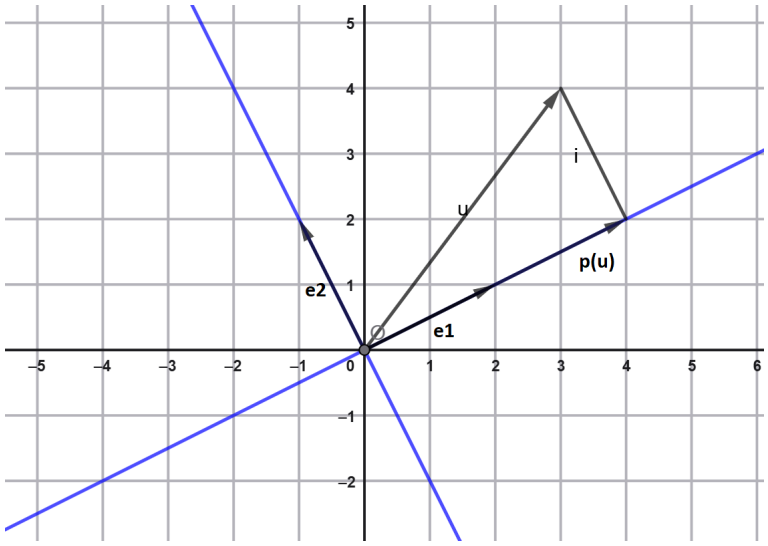
3. *En déduire que $E = F \oplus G$.*

• Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que $u = v + w$ avec v et w définis ci-dessus. Donc $u \in F+G$. On a donc $E \subset F+G$. Or $F + G \subset E$ par définition, donc $E = F + G$.

$F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$. Donc, $E = F \oplus G$.

4. *Soit p la projection sur F parallèlement à G.*

(a) *Dans le quadrillage ci dessous (1 unité=2 carreaux), dessiner les axes de $\mathbb{R}^2$, F, G et $u = (3,4)$. Graphiquement, trouver les coordonnées de $p(u)$ dans la base canonique d'une part et dans la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ d'autre part. Vous ferez apparaitre **tous les traits de construction**.*



Graphiquement, les coordonnées de $p(u)$ sont :

- dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $(4, 2)$

- dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$: $(2, 0)$

(b) *Lire graphiquement $p(\varepsilon_1)$ et $p(\varepsilon_2)$ en fonction de ε_1 et ε_2.*

$p(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 = 1\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2$ et $p(\varepsilon_2) = 0_E = 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2$.

(c) *Déterminer la matrice A de p dans la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$* ***au départ et à l'arrivée.***

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) *Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. En vous aidant de la question 2., trouver l'expression de $p(u)$.*

p est la projection sur F parallèlement à G donc, à $u \in E$, elle associe le v dans sa décomposition dans $F + G$. Donc

$$p : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(\dfrac{2y + 4x}{5}, \dfrac{y + 2x}{5}\right) \end{cases}$$

Exercice 5 : matrice, image et noyau

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ et la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ à l'arrivée est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En raisonnant sur les colonnes de A, trouver la rang de A, une base de l'image et du noyau de f. Vous êtes libres de les obtenir dans l'ordre que vous voulez.

On note C_1, C_2 et C_3 les 3 colonnes de A.

• $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ car $C_3 = -C_1$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f((1,0,0)), f((0,1,0))) = \mathrm{Vect}(1 - 2X + X^2, 2 + X)$. Ainsi, $(P_1 = 1 - 2X + X^2, P_2 = 2 + X)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Comme P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires, cette famille est libre. Donc (P_1, P_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. On a donc que le rang de A est égal à 2.

• Le théorème du rang nous donne alors :

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 2 = 1$.

• $C_3 = -C_1 \implies C_1 + C_3 = 0_{3,1} \implies e_1 + e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

D'où, $u = (1, 0, 1) \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme u est non nul, la famille (u) est libre. Or $\mathrm{Card}((u)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$ donc (u) est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Cela en est donc une base.